



Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Pós-Graduação em Matemática

AMAZILDE DE FARIAS BATISTA

# Construções Geométricas, Insolubilidade de Soluções dos Problemas Clássicos e Aplicações no Ensino Básico.

São Cristóvão – SE  
2018

AMAZILDE DE FARIAS BATISTA

**Construções Geométricas, Insolubilidade de Soluções dos  
Problemas Clássicos e Aplicações no Ensino Básico**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós -  
Graduação em Matemática PROFMAT da Uni-  
versidade Federal de Sergipe como parte dos re-  
quisitos para obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Allyson dos Santos  
Oliveira

São Cristóvão – SE  
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

B333c Batista, Amazilde de Farias  
Construções geométricas, insolubilidade de soluções dos  
problemas clássicos e aplicações no ensino básico / Amazilde de  
Farias Batista ; orientador Allysson dos Santos Oliveira. - São  
Cristóvão, 2018.  
48 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal  
de Sergipe, 2018.

1. Matemática 2. Construções geométricas. 3. Régua de  
cálculo. 4. Ensino fundamental. I. Oliveira, Allyson dos Santos  
orient. II. Título.

CDU 514:37

*Dedico esta dissertação a minha  
avó Jacira e ao meu filho Davi.*

# Agradecimentos

A Deus que me deu força para dar continuidade para que este sonho fosse concretizado;

A minha família que me incentivou e torceu por mim, em especial à minha avó que vibrava por cada conquista e acreditava em mim, mas que partiu antes da minha conclusão. E ao meu ao meu filho, Davi, que nasceu e renovou minhas forças para eu dar continuidade.

A meu esposo e família pelo apoio e compreensão.

Aos meus amigos da turma PROFMAT 2016 pela união, companhia e pelos momentos de descontração. Em especial a Diógenes por ser sempre solícito e disposto a ajudar. Vocês tornaram a batalha mais fácil!

Aos professores doutores, Gerson, Evilson, Giovana, Danilo, Allyson e Naldisson pelos conhecimentos repassados e pelo incentivo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Allysson e à banca examinadora pela contribuição por meio de sugestões para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Um agradecimento especial aos amigos Adailton e Wellington, que me incentivaram a ingressar no PROFMAT, me deram embasamento, palavras de incentivo, me cercaram de material e orientações. Agradeço também ao professor Natanael pela disposição de sempre em me ajudar esclarecendo as minhas dúvidas. Este título não seria possível sem a colaboração de vocês!

Por fim, à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

O estudo da Geometria, através das construções geométricas, é muito importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Este trabalho objetivou mostrar a importância de tais construções geométricas, as quais são realizadas com régua não graduada e compasso, analisando a possibilidade da resolução de problemas envolvendo esses instrumentos e o conhecimento sobre os números construtíveis. Para tal fim, será apresentado um breve histórico sobre a geometria e as construções geométricas com o objetivo de conhecer mais sobre seu surgimento e sobre como as construções eram utilizadas. Analisaremos, sobre os pontos construtíveis e veremos que os procedimentos para obtenção de tais pontos são provenientes do traçado de retas e de circunferências. Além disso, apresentaremos algumas construções elementares para auxiliar na resolução de problemas de construções. Respaldados na fundamentação teórica, apresentaremos a impossibilidade de resolução com régua e compasso dos três problemas clássicos gregos, cuja solução, não é possível, a não ser aproximadamente. Por fim, mostraremos exemplos de problemas de aplicação de construção geométricas com os instrumentos euclidianos e com o uso do GeoGebra como sugestões de atividades para o ensino básico.

**Palavras-chave:** Construções geométricas; Números construtíveis; Pontos Construtíveis; régua e compasso.

# Abstract

The study of Geometry, through geometric constructions, is very important for the development of logical-deductive reasoning. This work aimed to show the importance of such geometric constructions, which are performed with non - graduated ruler and compass, analyzing the possibility of solving problems involving these instruments and knowledge about the constructible numbers. To this end, a brief history of geometry and geometric constructions will be presented with the objective of knowing more about its appearance and about how the constructions were used. We will analyze, on the constructible points and we will see that the procedures to obtain such points come from the drawing of lines and of circumferences. In addition, we will present some elementary constructions to assist in the resolution of construction problems. Backed up in the theoretical foundation, we present the impossibility of solving with a ruler and compass of the three classical Greek problems, whose solution is not possible, except approximately. Finally, we will show examples of geometrical construction application problems with Euclidean instruments and the use of GeoGebra as suggestions for activities for basic education.

**Keywords:** Geometrical constructions; Constructible numbers; Constructible Points; ruler and compass.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**Construções Geométricas, Insolubilidade de Soluções e  
Aplicações no Ensino Básico**

*por*

*Amazilde de Farias Batista*

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Allyson dos Santos Oliveira - UFS  
Orientador

Prof.ª Giovana Siracusa Gouveia - UFS  
Primeiro Examinador

Prof. Lucas Rezende Valeriano - UFS  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Outubro de 2018

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze  
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887  
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexto Histórico</b>	<b>3</b>
1.1 Breve Histórico da Geometria: da origem à Geometria Euclidiana . . . . .	3
1.2 Euclides e os Elementos . . . . .	5
1.3 Construções Geométricas . . . . .	8
1.4 Os três famosos problemas . . . . .	8
<b>2 Construções Geométricas Fundamentais</b>	<b>11</b>
<b>3 Fundamentação teórica</b>	<b>18</b>
3.1 Construção de Corpos . . . . .	18
3.2 Pontos Construtíveis . . . . .	24
<b>4 A Insolubilidade dos três problemas clássicos</b>	<b>29</b>
4.1 Duplicação do cubo . . . . .	29
4.2 Trissecção do ângulo . . . . .	30
4.3 Quadratura do círculo . . . . .	33

<b>5</b>	<b>Construções Geométricas no Ensino Básico</b>	<b>34</b>
5.1	A Importância das Construções Geométricas no Ensino Básico . . . . .	34
5.2	Aplicações no Ensino Básico . . . . .	35
5.3	Construções geométricas no Geogebra . . . . .	38
5.3.1	O GeoGebra . . . . .	38
5.3.2	Aplicações no Ensino Básico com o uso do Geogebra . . . . .	39
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Demonstração do Teorema sobre Construções Geométricas</b>	<b>48</b>

# Introdução

A Geometria, teve sua origem através de diferentes povos e seus conhecimentos estavam associados à aplicações práticas relacionadas à divisão de terras e à Astronomia. Os povos que tiveram maior influência no desenvolvimento da matemática foram os mesopotâmicos e os gregos. Para os gregos, os conhecimentos geométricos deveriam ser estabelecidos por raciocínio dedutivo através de demonstrações já para os egípcios e babilônicos esses conhecimentos eram instituídos empiricamente. Mas, a Grécia que deixou maior herança quanto aos estudos da Geometria. Além das contribuições dos ilustres, Thales de Mileto e Pitágoras, é de grande valia ressaltar Euclides de Alexandria, que nasceu por volta do ano 330 aC. Sua obra, “Os Elementos”, a qual a maioria das proposições é voltada para a construção geométrica, a partir da utilização de uma régua não graduada e de um compasso. Os Elementos de Euclides contém praticamente toda matemática produzida até então, e serviu como introdução à matemática elementar: Aritmética, Geometria e Álgebra. Ademais da riqueza de informação matemática se destaca também por apresentar um conteúdo com linguagem inovadora de forma axiomática, que de tão consistente resiste à mudanças ao longo do tempo.

As construções geométricas euclidianas atraem por sua beleza e por problemas aparentemente simples que, em alguns casos, não apresentam solução. Dentre esses casos podemos citar os três problemas clássicos: A duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo. Como os gregos e posteriormente outros estudiosos não sabiam da impossibilidade de resolução em meio às tentativas surgiram contribuições importantíssimas para a matemática. Somente no século XIX foi provada a insolubidade de tais problemas.

Diante desse contexto, o objetivo do presente trabalho é apresentar construções geométricas elementares e munidos de uma fundamentação teórica provar a impossibilidade de tais construções geométricas que ficaram sem solução durante séculos. Além disso, será mostrado alguns exemplos de construções com régua e compasso de possível aplicação no Ensino básico, além disso serão apresentados exemplos, utilizando o software GeoGebra.

Esta dissertação foi dividida em cinco capítulos. O primeiro capítulo fala sobre o contexto histórico relatando um pouco sobre a história da geometria e o desenvolvimento das construções geométricas. Já o segundo capítulo mostra o passo a passo de algumas construções fundamentais que fazem parte do processo de outras construções. O terceiro fala sobre a fundamentação teórica expondo uns teoremas e demonstrações afim de provar a impossibilidade das construções dos três problemas clássicos, apresentadas no capítulo seguinte. E por último, o quinto capítulo, aborda a importância das construções geométricas no ensino Básico, expondo alguns exemplos com a utilização dos instrumentos euclidianos e outros exemplos com o uso do geogebra como recurso didático aplicado em sala de aula.

# Capítulo 1

## Contexto Histórico

### 1.1 Breve Histórico da Geometria: da origem à Geometria Euclidiana

É do conhecimento de muitos que a Geometria, assim como outras ciências, foi desenvolvida a partir de uma necessidade geral. Segundo Boyer (1974) no livro *História da Matemática*, a geometria teve sua origem no Egito, e seu surgimento veio da necessidade de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo. As chuvas sazonais causavam enchentes sobre o Delta do referido rio que depositavam húmus nas margens favorecendo a agricultura e pecuária e, a cada ano, quando o rio transbordava seu leito natural, a inundação fazia desaparecer as marcas das delimitações entre as propriedades de terras fixadas no ano anterior. Sem as marcações das fronteiras, os proprietários não tinham como saber o tamanho de sua terra tanto para cultivar quanto para o pagamento de impostos. Daí a denominação da palavra grega GEOMETRIA (GEO = terra; METRIA = medida) cujo significado é medida de terra.

Para realizar a tarefa de divisão de terras sem grandes problemas, foram nomeados funcionários chamados de agrimensores ou “estiradores de corda”, pois usavam cordas com nós equidistantes um do outro. Tais funcionários eram encarregados de avaliar prejuízos das cheias, medindo e refazendo os limites de suas áreas de cultivo. Estes agrimensores acabaram por aprender a determinar áreas de terrenos dividindo-os em retângulos e triângulos menores cujas áreas somadas equivaliam à área total.

Os registros contam que a geometria egípcia decorria de problemas de mensuração, como cálculos de áreas, volumes (em especial o volume do tronco de pirâmide de base quadrada) e noções de ângulos.



Figura 1.1: Agrimensores dividindo terras.

Os Babilônicos também tiveram influência no desenvolvimento da Geometria. Assim como os egípcios, eles tinham conhecimentos sobre áreas, volumes e ângulos, mas um dos seus principais legados foi a divisão da circunferência em 360 partes. Para os povos da Mesopotâmia, a geometria era apenas uma aplicação de álgebra e aritmética que associava números a figuras. Diferentemente do caso dos egípcios quanto ao registro do uso do teorema de Pitágoras, há documentos que comprovam o uso do teorema pela civilização babilônica.

Foi no Egito e na Mesopotâmia que o desenvolvimento da geometria deu início, mas, com as mudanças políticas e econômicas ocorridas nos últimos séculos do segundo milênio a.C. o poder desses povos diminuiu, com isso, a geometria teve seus desenvolvimentos futuros principalmente na Grécia.

Para as nações egípcia e babilônica, a classe sacerdotal era detentora do conhecimento, para eles a vontade de Deus não necessitavam de explicações. Já na Grécia, os filósofos especulavam sobre o mundo e defendiam suas ideias contra o preconceito da visão do senso comum. Por isso, para os gregos, os conhecimentos geométricos deveriam ser estabelecidos por raciocínio dedutivo através de demonstrações, e não empiricamente como era feito pelos povos egípcios e babilônicos.

A Grécia foi a civilização antiga que mais contribuiu para a construção e desenvolvimento da matemática. A partir do século VIII a.C., o centro do mundo civilizado que antes era o Egito e Mesopotâmia passou a ser a cidade de Mileto. Contudo, o ápice da civilização grega ocorreu quando

Atenas passou a ser a capital da Grécia, por volta dos séculos V e IV a.C, época em que Atenas era governada por Péricles, também conhecida como “Idade de Ouro de Atenas” por apresentar grande desenvolvimento político, urbano, social e intelectual. Após as conquistas de Alexandre, o Grande, entre 334 e 327 a.C., Atenas perdeu gradativamente seu poder e Alexandria, localizada no Egito, passou a ocupar o lugar de cidade mais importante do mundo grego, pois os gregos tiveram sobrevida em Alexandria.

Apesar das grandes contribuições dos gregos para o desenvolvimento da Matemática, pouco se sabe sobre a história da Matemática na Grécia Antiga. As informações sobre o surgimento e a história da Geometria grega foram obtidas através de poucas notícias espalhadas por escritores antigos. Um desses escritores foi Eudemo, discípulo de Aristóteles, responsável pela obra História da Geometria, também conhecida como Catálogo dos Geômetras ou Sumário de Eudemo. Em seu trabalho, Eudemo cita alguns gregos e suas contribuições para a matemática. Ele começa citando Thales como o responsável pelo transporte de informações vindas do Egito para a Grécia. Ele relata que Thales viajou para o Egito, descobriu muitas coisas, mostrou princípios e aplicou de forma mais geral e sensível. Nomes de notáveis destaques aparecem no catálogo, como Pitágoras, Platão, Hipócrates, Teeteto, entre outros grandes nomes.

## 1.2 Euclides e os Elementos

Ao relatar as contribuições gregas para o desenvolvimento da Matemática, Eudemo não cita Euclides, mas Proclus, filósofo grego que viveu no século V d.C., responsável por preservar e sintetizar o catálogo de Eudemo, resolveu acrescentar informações ao catálogo citando-o com a finalidade de “completar” e enriquecer o sumário, devido à grande importância e contribuição de Euclides.

E não muito mais jovem do que esses [ alunos de Platão ] é Euclides, que reuniu os “Elementos”, organizando a fim muitos dos teoremas de Eudoxus, aperfeiçoando muitos de Teeteto, e também trazendo a demonstração irrefutável as coisas que tinham sido apenas vagamente provado por seus antecessores. Este homem viveu na época do primeiro Ptolomeu, por Arquimedes, que acompanhou de perto no primeiro Ptolomeu faz menção de Euclides, e ainda dizem que Ptolomeu uma vez perguntou-lhe se havia um caminho curto para estudar geometria que os elementos, à qual ele respondeu que não havia nenhuma estrada real para a geometria. Ele é, portanto, mais jovem do que o círculo de Platão, mas mais de Eratóstenes e Arquimedes, pois estes foram contem-

porâneos, como Eratóstenes diz em algum lugar. Em seu objetivo era um platônico, estando em sintonia com esta filosofia, onde ele fez a final de todo o “Elementos” a construção das chamadas figuras platônicas.



Figura 1.2: Euclides, calcografia anônima.

Assim com a história da matemática grega, pouco se sabe sobre a vida de Euclides. Ele foi um chefe de escola em Alexandria, responsável por algumas obras, das quais temos conhecimento de cinco e dentre elas, a principal foi “Os Elementos”. Possivelmente, Os Elementos sejam uma coletânea bem elaborada e organizada de trabalhos dos seus predecessores, a qual Euclides contribuiu fortemente com demonstrações e aprimorou muitas outras. A excelência deste trabalho dá-se pela sistematização lógica e seleção das proposições, além de apresentar afirmações simples mostrando aspectos essenciais num sentido mais geral, com belas demonstrações e linguagem acessível.

“Os Elementos de Euclides” como é conhecido hoje, apresenta uma série de treze livros, dos quais, os quatro primeiros abordam a geometria plana elementar e estudam propriedades do círculo e de



figuras formadas por retas, abordando problemas cuja solução se faz com uso de régua e compasso. Destes quatro livros, vale ressaltar o livro I, o mais utilizado na educação básica por trazer consigo definições e conceitos que são pré-requisitos para entender a geometria. O livro V aborda a teoria de proporções e o livro VI aplica essa teoria ao estudo de geometria. Os três livros seguintes tratam sobre a teoria dos números. O livro X, considerado por muitos especialistas o mais notável dos Elementos, trata dos irracionais, ou seja, discorre sobre segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado. E os livros XI, XII e XIII versam sobre geometria espacial.

Tamanha é a importância e contribuição dessa obra que serviu de base para o ensino da geometria, ainda em vigor nos dias atuais. “Os Elementos”, de Euclides, o mais antigo livro de matemática, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições é, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos” GARBI (2006, p.49).

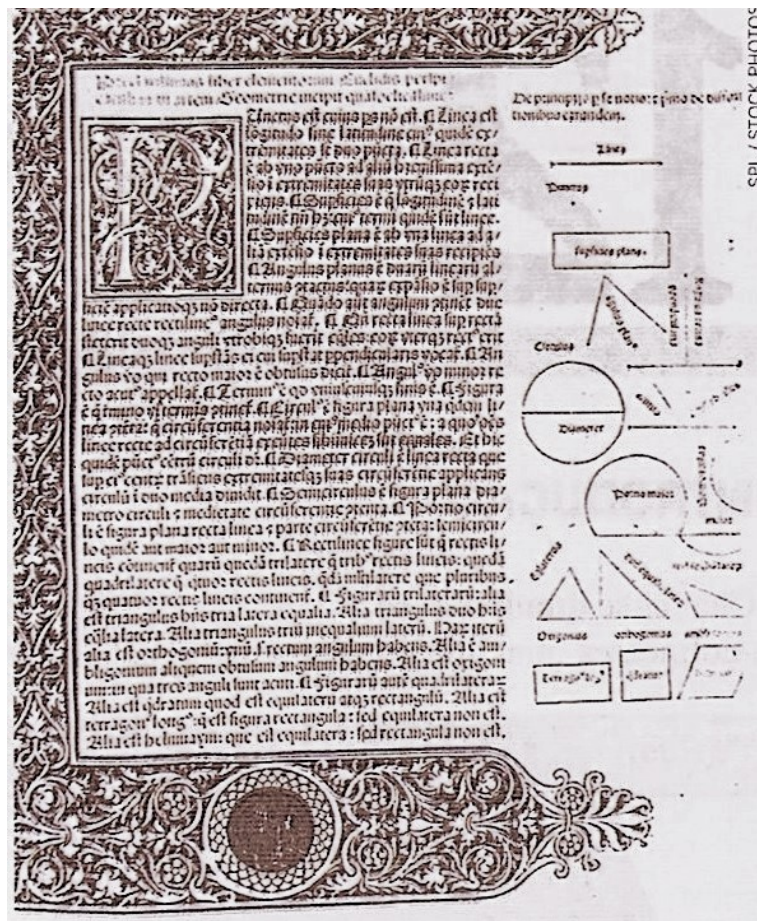


Figura 1.3: A primeira página da primeira edição impressa de “Os Elementos”. (Veneza, 1482).

Euclides é considerado o “pai da geometria” e o criador do chamado “método axiomático da

matemática”.

### 1.3 Construções Geométricas

Os gregos utilizavam segmentos de reta, para indicar números, assim usando esses segmentos era intuitivo realizar operações de adição e subtração, por exemplo. Nota-se frequente uso dessa associação entre os números e segmentos de retas nos elementos de Euclides, em que ele associava um número a um segmento de reta chamado AB.

Euclides, em suas demonstrações na obra “Os Elementos”, usava continuamente não só a régua sem escalas para traçar retas, como também para traçar círculos, utilizava o compasso euclidiano (não fixável), cujas pernas mantinham uma abertura constante somente enquanto as pontas estavam sobre o papel, mas que se fechavam quando levantadas. Tais instrumentos ficaram conhecidos como “instrumentos euclidianos”.

Com o uso da régua e do compasso, os gregos elaboravam muitas construções geométricas e conseguiam solucionar diversos problemas da geometria, tais como: construção de retas paralelas a uma reta dada, a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, a bissecção de um ângulo, a bissecção de um segmento, a construção de circunferência e arco, entre outras.

Mas, o que os gregos ainda não sabiam é que nem todos os problemas da Geometria poderiam ser solucionados utilizando os instrumentos em questão, são o caso dos Três Problemas Clássicos da Geometria Grega.

### 1.4 Os três famosos problemas

Os matemáticos da Grécia Antiga estudaram três problemas de Geometria que tiveram importância no desenvolvimento da Matemática. Esses problemas são caracterizados como de construção pois a solução deveria ser encontrada com o uso de régua sem graduação e compasso, os únicos instrumentos utilizados por Euclides nos Elementos.

Os três grandes problemas clássicos são os seguintes:

1. Duplicação do cubo, ou problema de construir o lado de um cubo, cujo volume é o

dobro do de um cubo dado;

2. Trissecção do ângulo, ou problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais;
3. Quadratura do círculo, ou problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

A Duplicação do cubo, segundo uma das lendas, surgiu na época de uma grande praga que ocorreu em Atenas (430 a.C) e na procura de uma solução para acabar com a praga, a população procurou o oráculo de Delos, e o deus Apolo ordenou que fosse duplicado o seu altar. Então, dobraram as dimensões do altar, mas, com isso seu volume foi aumentado num fator 8, como o deus não ficou satisfeito, a praga continuou matando a população.

A trissecção do ângulo pode ter surgido da necessidade dos egípcios em medir ângulos entre estrelas para determinar o tempo da noite ou ainda surgido para trissecionar um ângulo de  $60^\circ$  com a finalidade de construir um polígono regular de nove lados.

Já a quadratura do círculo, pouco se conhece sobre o seu surgimento, mas sabe-se que ele foi o mais fascinante dentre os três e o que mais perdurou em toda história. Em 1800 a.C. os egípcios tentaram solucionar o problema. Para isso eles usaram o lado do quadrado igual a  $\frac{8}{9}$  do diâmetro do círculo dado. Segundo Eves (2004, p. 140) contribuições para a resolução do problema foram dadas por Anaxágoras (499 a 427 a.C.), Hipócrates de Quio (Contemporâneo de Anaxágoras) e Dinostrato (350 a.C.).

Devido a dificuldade de encontrar soluções de tais problemas usando régua sem graduação e compasso, os gregos sentiam-se atraídos em resolvê-los e, dessas tentativas, foram surgindo brilhantes descobertas as quais colaboraram para o desenvolvimento de novas teorias.

A esse respeito, Eves (2004) declara:

A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais. Um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos.

Apesar da impossibilidade de solução de tais problemas ter sido abordada por Descartes em sua obra, “A geometria”, a insolubidade só foi provada por volta do século XIX, cerca de 2200

anos depois dos problemas serem concebidos. Tal feito foi demonstrado por Gauus e Abel em seus trabalhos que versavam sobre a resolução de equação algébricas por meio de radicais.

## Capítulo 2

# Construções Geométricas Fundamentais

Para resolver alguns problemas de construções geométricas, é útil estudar construções básicas que farão parte de diversos problemas geométricos. Tais construções abaixo mencionadas, estão fundamentadas nos resultados da Geometria Euclidiana Plana, ver [7].

1. **Transporte de segmentos** Realizar tal transporte sobre uma semirreta dada, significa construir um segmento congruente a um segmento dado, mas contido na semirreta, e tendo uma de suas extremidades coincidindo com a origem da semirreta.

Dado um segmento  $AB$  e uma semirreta  $OX$ , com o compasso fixado em  $A$  e abertura  $AB$ , transportamos a medida  $AB$  a partir de  $O$ , obtendo o ponto  $C$  na semirreta  $OX$ . Note que,  $AB$  e  $OC$  são congruentes, o que pode ser justificado pelo fato que uma reta intersecciona o interior de uma circunferência, então intersecciona a circunferência em dois pontos.

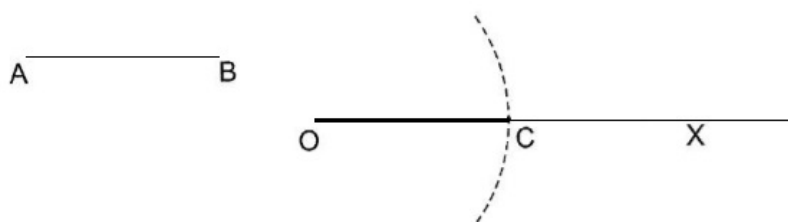


Figura 2.1: Transporte de segmentos.

2. **Transporte de ângulos** Consiste em construir um ângulo congruente a um ângulo dado, em um dos semiplanos determinado pela reta que contém tal semirreta, e tendo esta semirreta

como um de seus lados.

Centra-se o compasso no vértice do ângulo  $AOB$  a ser transportado e, com um raio arbitrário descreve-se um arco que corta os dois lados do ângulo, gerando os pontos  $D$  e  $E$ . Em seguida, traça-se uma semirreta  $CX$  como lado do ângulo a ser construído. Com a mesma abertura do compasso e centro no ponto  $C$ , descreve-se um arco, igual ao primeiro e que corta o lado já traçado, definindo um ponto  $F$  que corresponde ao ponto  $E$  do primeiro ângulo. Retorna-se ao ângulo  $AOB$  e mede uma abertura no compasso correspondente à distância entre os pontos  $D$  e  $E$ . Aplica-se esta distância na construção do segundo ângulo a partir do ponto  $F$ , definindo o ponto  $G$  correspondente ao ponto  $D$ . Por fim, será traçada uma semirreta de origem passando por  $G$ . Daí, teremos o ângulo  $AOB$  congruente ao ângulo  $GCF$ .

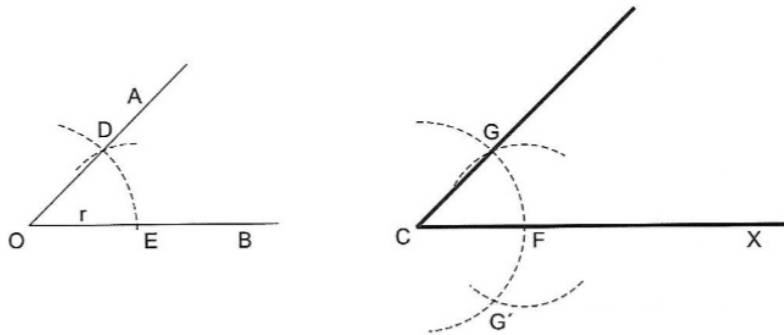


Figura 2.2: Transporte de ângulos.

De fato, o ângulo  $GCF$  tem como um dos seus lados a semirreta  $CX$ , e, pelo caso de congruência de triângulos, L.L.L., é congruente ao ângulo  $AOB$  dado.

3. **Mediatriz de um segmento** Com a ponta seca do compasso no ponto  $A$ , abra uma medida maior que a metade do segmento  $AB$  e trace um arco que corte o segmento. Repita o processo, mas agora pelo ponto  $B$ , utilizando a mesma medida no compasso. Trace a mediatriz  $m$  unindo as intersecções dos dois arcos, ou seja unindo o ponto  $P$  e  $Q$ . Observe que o quadrilátero  $AQBP$  é um losango, logo suas diagonais são perpendiculares e encontram-se no seu ponto médio  $M$ . Assim, a reta  $m$  que passa por  $P$  e  $Q$  é a mediatriz do segmento  $AB$ .

#### 4. Reta perpendicular a uma reta $r$ dada e um ponto $P$ dado

Temos dois casos a considerar:

**Caso 1:** Tomemos  $P$  pertencente a  $r$ .

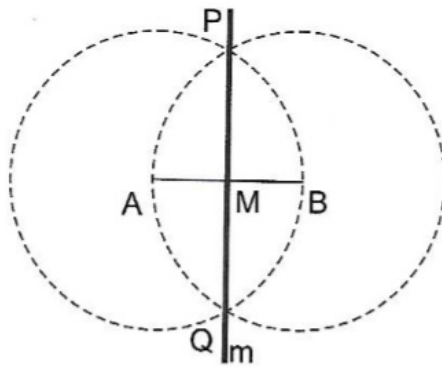


Figura 2.3: Mediatrix de um segmento.

Com o compasso centrado em  $P$  e um raio  $r$  arbitrário, trace uma circunferência e na intersecção entre a circunferência e a reta marque os pontos  $A$  e  $B$ , determinando assim um segmento  $AB$ , o qual  $P$  é o ponto médio. A partir dos pontos  $A$  e  $B$  trace a mediatrix passando por  $P$ . Esta é a reta procurada.

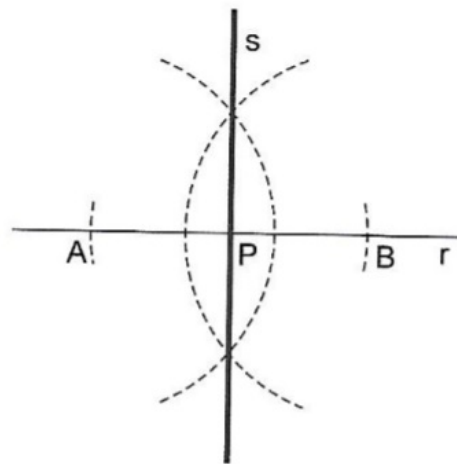


Figura 2.4: Perpendicular com  $P$  pertencente a  $r$ .

**Caso 2:** Tomemos  $P$  não pertencente a  $r$ .

Sobre uma reta  $r$  marque um ponto  $A$ . Com o compasso centrado em  $P$  e abertura igual a  $PA$  trace uma circunferência e na intersecção da circunferência com a reta  $r$  assinale o ponto  $B$ . A reta  $s$  procurada será a mediatrix do segmento  $AB$ .

5. **Retas paralelas** Para traçar uma reta paralela a uma reta dada, também temos dois casos

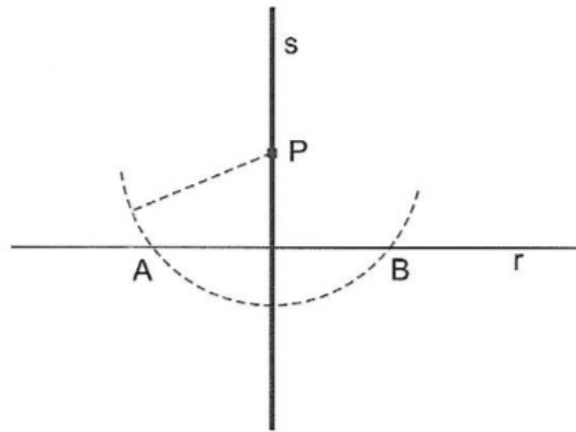


Figura 2.5: Perpendicular com  $P$  não pertencente a  $r$ .

a temos dois casos a analisar:

**Caso 1:** É dada a distância  $d$  entre as duas retas.

Por dois pontos  $A$  e  $B$  trace duas retas perpendiculares à reta  $r$ , as quais serão chamadas de  $AX$  e  $BY$ . Transporte a medida  $d$  a partir de  $A$  e  $B$  sobre as semirretas  $AX$  e  $BY$ , obtendo os pontos  $C$  e  $D$ , respectivamente, à distância  $d$  de  $r$ .

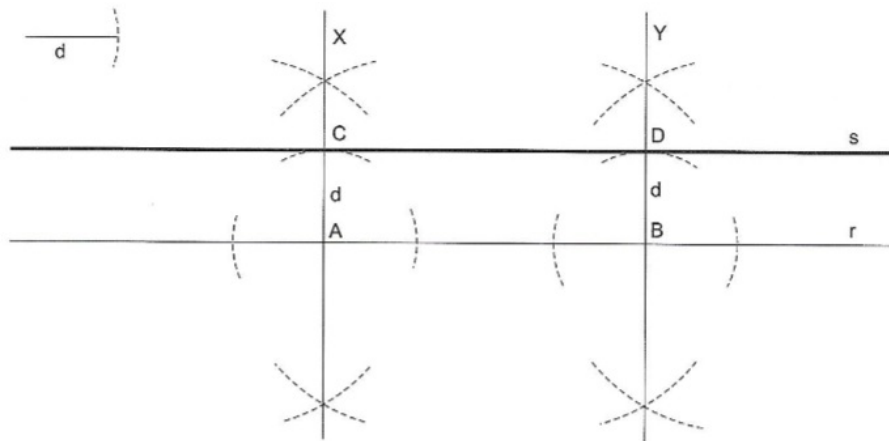


Figura 2.6: Paralela dada a distância  $d$ .

Observe que, o quadrilátero  $ABCD$  é um paralelogramo pois seus lados  $AC$  e  $BD$  são paralelos e congruentes, logo as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.

**Caso 2:** É dado um ponto  $P$  pertencente à reta procurada.



Centre o compasso em  $P$  e trace um arco que encontre  $r$  no ponto  $A$ . Com centro em  $A$  e mesmo raio, trace outro arco que encontrará  $r$  no ponto  $B$ . Com centro em  $B$  e mesmo raio, trace outro arco que encontrará o primeiro arco no ponto  $Q$ .

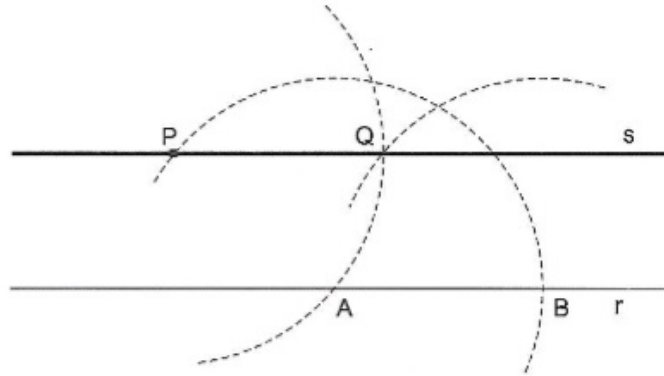


Figura 2.7: Paralela dado um ponto  $P$ .

A reta  $PQ$  é paralela à reta  $r$ , pois o quadrilátero  $ABQP$  tem os quatro lados congruentes, sendo portanto um paralelogramo.

## 6. Bissetriz de um ângulo

Trace um arco com centro no vértice  $O$  do ângulo dado e assinale  $D$  e  $E$  nas intersecções do arco com os lados  $OA$  e  $OB$  do ângulo. Com um mesmo raio, suficientemente grande, Trace um arco com centro em  $D$  e um arco com centro em  $E$  e na intersecção entre os arcos marcar o ponto  $P$ . A semirreta  $OP$  é a bissetriz do ângulo  $AOB$ , pois os ângulos  $AOP$  e  $BOP$  são congruentes já que os triângulos  $DOP$  e  $EOP$  são songruentes pelo caso L.L.L.

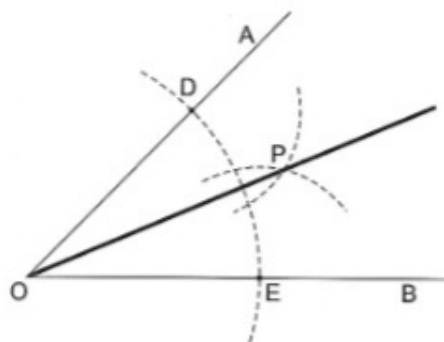


Figura 2.8: Bissetriz.

## 7. Divisão de um segmento em partes iguais

Podemos dividir segmentos em partes iguais, utilizando mediatrizes sucessivas, apenas quando o fator da divisão for resultado de uma potência de dois. Isso acontece pois cada segmento dividido por uma mediatriz será novamente dividido ao meio.

Para fatores diferentes, utilizamos outro processo gráfico de divisão respaldado no Teorema de Tales.

Faremos um exemplo dividindo um segmento em cinco partes iguais. O mesmo processo pode ser feito para dividir um determinado segmento em um número de partes quaisquer.

Dado o segmento  $AB$ , trace uma semirreta  $t$  iniciando no vértice  $A$ , formando um ângulo qualquer com o segmento  $AB$ . Com o compasso centrado em  $A$  com uma abertura qualquer, de medida  $u$ , trace uma circunferência passando pela reta  $t$  e na sua intersecção centre o compasso e com a mesma abertura trace outra circunferência obtendo outro segmento do tamanho do obtido anteriormente. Repita esse passo até obter o número de divisões desejadas. Marque o ponto  $B$  na última intersecção obtida e trace um segmento  $AB$ . Em seguida, trace segmentos retas paralelas a  $AB$ , partindo de cada intersecção obtida de medida  $u$ . E nas intersecções obtidas marque os pontos os quais serão as divisões desejadas.

Em cada ponto obtido na intersecções das paralelas com o segmento  $AB$ , marque os pontos  $P, Q, R, e S$  e em seus correspondentes marque  $P', Q', R', e S'$  respectivamente. Assim, temos que  $AP = PQ = QR = RS = SB$ .

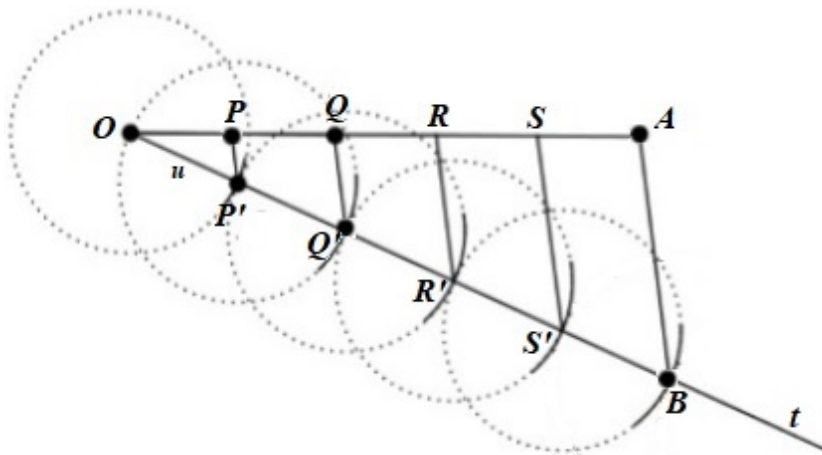


Figura 2.9: Divisão do segmento  $AB$  em cinco partes iguais.

De fato, foi obtido um feixe de retas paralelas cortada por retas transversais, o que remete ao Teorema de Tales o qual afirma que num mesmo plano um feixe de retas paralelas determinam, em duas retas transversais, segmentos de retas proporcionais, onde,  $\frac{AP'}{P'Q'} = \frac{AP}{PQ}$ ,

como  $AP' = P'Q'$  temos, que  $\frac{AP}{PQ} = 1$ , logo  $AP = PQ$ . Da mesma maneira comprova-se a igualdade entre os demais segmentos.

## Capítulo 3

# Fundamentação teórica

### 3.1 Construção de Corpos

Para compreender os problemas de construção geométrica deve-se traduzir os problemas geométricos para a linguagem algébrica, caracterizando quantitativamente os objetos por números reais. Realizar uma construção geométrica equivale a relacionar um segmento  $x$  procurado a segmentos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... dados, em seguida devemos encontrar a solução para esta relação (equação) e, por fim, determinar se a solução desta equação pode ser obtida por processos algébricos que correspondam a construções com régua e compasso.

Mas como saber se este valor encontrado para  $x$  é ou não um número que pode ser construído com os instrumentos euclidianos? Para que este valor seja construtível com régua não graduada e compasso esse número deve atender a condição de ser obtido apenas com as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada, como diz o teorema a seguir:

**Teorema 3.1.** *Se  $a$  e  $b$  são números reais e positivos construtíveis, então  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a \cdot b$ ,  $a/b$  e  $\sqrt{a}$  são construtíveis.*

*Demonstração.* Dados dois segmentos de comprimentos  $a$  e  $b$  (conforme medidos por um segmento “unitário”), faremos a correspondência entre as operações e suas construções geométricas:

- $a + b$

Traçamos uma reta com uma régua e, com um compasso, assinalamos sobre ela as distâncias  $OA = a$ , e  $AB = b$ . Portanto  $a + b$  equivale ao segmento  $OB$ , ou seja,  $OB = a + b$ .

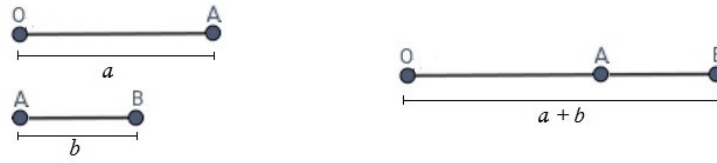


Figura 3.1: Construção  $a + b$ .

- $a - b$

Com  $OA = a$ ,  $AB = b$  e  $AB$  com direção oposta a  $OA$ , temos  $OB = a - b$ .



Figura 3.2: Construção  $a - b$ .

- $ab$

Tracemos um segmento de reta  $OA = a$  e um segmento de reta  $OB = b$  não colineares, com  $OB$  pertencente à reta  $r$ . Sobre  $OA$  marcamos  $OC = 1$ , em seguida, traçamos uma reta paralela a  $BC$  passando por  $A$  e intersectando a reta  $r$  em  $D$ . Assim,  $OD$  terá comprimento  $a.b$ .

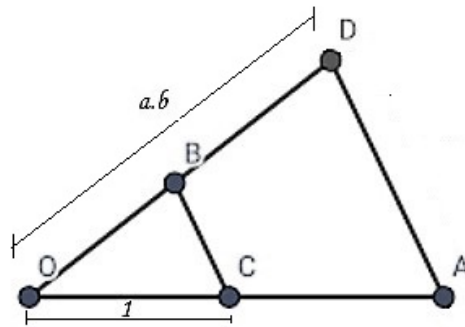


Figura 3.3: Construção  $a.b$ .

Para justificar, usamos a semelhança entre os triângulos  $AOD$  e  $COB$ , observe:

$$\begin{aligned}\frac{OD}{OA} &= \frac{OB}{OC} \\ \frac{OD}{a} &= \frac{b}{1} \\ OD &= ab\end{aligned}$$

- $a/b$

Marquemos  $OB = b$  e  $OA = a$ , sobre os lados de qualquer ângulo  $OAB$ , e sobre  $OB$  marcamos  $OD = 1$ . Traçamos por  $D$  uma reta paralela a  $AB$  encontrando  $OA$  em  $C$ . Então,  $OC$  terá comprimento  $a/b$ .

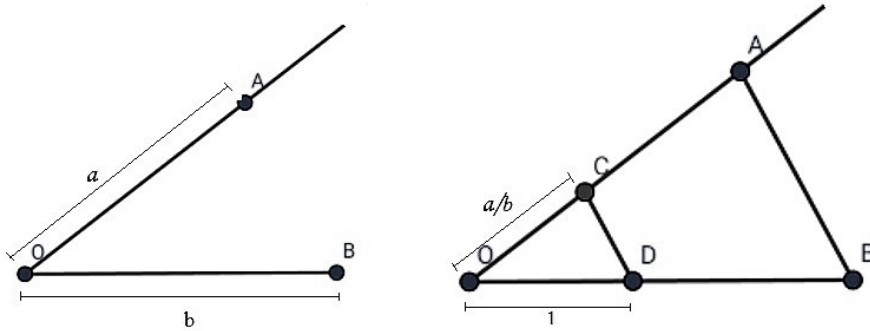


Figura 3.4: Construção  $a/b$ .

De fato, usando a semelhança entre triângulos os  $AOB$  e  $AOD$  temos:

$$\begin{aligned}\frac{OC}{OA} &= \frac{OD}{OB} \\ \frac{OC}{a} &= \frac{1}{b} \\ OC &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

- $\sqrt{a}$

Considere uma reta  $r$  e um segmento  $AB$ , marcamos  $OA = a$  e  $AB = 1$  sobre a reta  $r$ . Traçamos agora um semicírculo com  $OB$  como seu diâmetro e construímos a perpendicular a  $OB$  passando por  $A$  que intersecciona o semicírculo em  $C$ . Construindo o triângulo  $OBC$  temos que  $AC = \sqrt{a}$ .

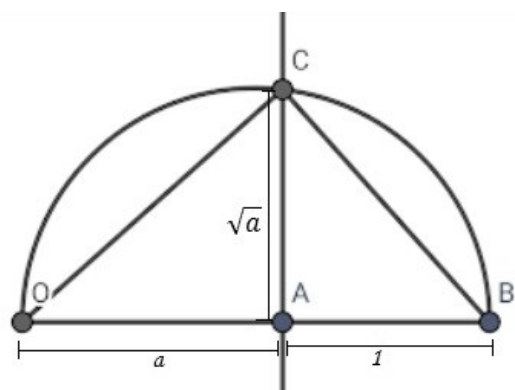


Figura 3.5: Construção  $\sqrt{a}$ .

De fato, observe que o triângulo tem um ângulo reto em  $C$ , pois um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto. Portanto, os triângulos  $OAC$  e  $CBA$  são semelhantes. Assim, fazendo  $AC = x$  temos:

$$\begin{aligned}\frac{OA}{AC} &= \frac{AC}{AB} \\ \frac{a}{x} &= \frac{x}{1} \\ x^2 &= a \\ x &= \sqrt{a}\end{aligned}$$

Diante do exposto nas construções elementares acima, observa-se que  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a \cdot b$ ,  $a/b$  e  $\sqrt{a}$  são construtíveis.

□

Assim, observa-se que podemos construir com régua e compasso todos os números que podem ser obtidos a partir da unidade aplicando sucessivamente adição, subtração, multiplicação e divisão. Consequentemente, temos que são construtíveis todos os números naturais e todos os números inteiros. São construtíveis também todos os números racionais, pois tratam-se de quocientes entre inteiros. Além disso, como foi demonstrado, também é construtível a  $\sqrt{a}$  que pode ser um número irracional.

De acordo com o exposto acima, observa-se que os processos algébricos "racionais" ou seja, a adição, subtração, multiplicação, e divisão de quantidades conhecidas, podem ser executadas por construções geométricas.

A partir de quaisquer segmentos dados, medidos por números reais  $a, b, c, \dots$ , podemos, por meio de aplicação sucessiva destas construções simples, construir qualquer quantidade que possa ser expressa em termos de  $a, b, c, \dots$ , de maneira racional, isto é, por aplicação repetida da adição, subtração, multiplicação e divisão. A totalidade das quantidades que podem ser obtidas desta forma a partir de  $a, b, c, \dots$  é chamada de corpo numérico, um conjunto de números tal que quaisquer operações racionais aplicadas a dois ou mais elementos do conjunto produzam como resultado um número do conjunto. Portanto, temos que os números racionais, os números reais e os construtíveis são exemplos de tais corpos. No caso presente, diz-se que o corpo é gerado pelos números dados  $a, b, c, \dots$ .

A partir da unidade, podemos assim construir o corpo dos números racionais. Se começarmos com qualquer corpo  $F$  de números construtíveis podemos construir qualquer número da forma  $a + b\sqrt{k}$  onde  $a, b$  e  $k$  estão em  $F$ .

**Exemplo 3.1.** *Verifique que o conjunto de números na forma  $a + b\sqrt{2}$ , onde  $a$  e  $b$  são racionais, é um corpo. O número 2 poderia ser substituído por qualquer racional positivo?*

Solução: Sejam os números  $x_1 = a + b\sqrt{2}$  e  $x_2 = a' + b'\sqrt{2}$  com  $a, a', b$  e  $b'$  racionais. Assim,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= (a + a') + (b + b')\sqrt{2}, \\x_1 - x_2 &= (a + a') - (b + b')\sqrt{2}, \\x_1 \cdot x_2 &= (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}, \\\frac{x_1}{x_2} &= \left(\frac{aa' - 2bb'}{a'^2 - 2b'^2}\right) + \left(\frac{a'b + ab'}{a'^2 - 2b'^2}\right)\sqrt{2}\end{aligned}$$

sendo que na divisão considerou-se  $x_2 \neq 0$ , com isso verifica-se que as quatro operações geram resultados da forma  $c + d\sqrt{2}$ , com  $c$  e  $d$  racionais. No caso, a  $\sqrt{2}$  poderia ser substituída por qualquer número da forma  $\sqrt{k}$  com  $k$  racional.

**Exemplo 3.2.** *Construir  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ .*

Solução: Chamaremos o corpo inicial de  $F_0$  e o novo corpo de números da forma  $a + b\sqrt{2}$ , tomando um número de  $F_1$ , digamos que  $k = 1 + \sqrt{2}$  e extraíndo sua raiz quadrada obtendo assim o número construtível

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{k}$$



e, com ele, o corpo de todos os números

$$p + q\sqrt{k}$$

onde  $p$  e  $q$  podem ser agora números arbitrários de  $F_1$ , isto é, da forma  $a + b\sqrt{2}$ , com  $a, b$  em  $F_0$ , isto é, racional.

Observemos agora sua construção:

- Começemos pela construção de  $\sqrt{2}$ .

Trace uma reta  $r$  e um segmento  $AB$ , marcamos  $OA = 2$  e  $AB = 1$  sobre uma reta. Traçamos agora um semicírculo com  $OB$  como seu diâmetro e construímos a perpendicular a  $OB$  passando por  $A$  a qual chamaremos de  $s$  que intersecciona o semicírculo em  $C$ . Construindo o triângulo  $OBC$  temos que  $AC = \sqrt{2}$ . Note que pela relação métrica no triângulo retângulo temos que  $AC^2 = OB \cdot AB$ .

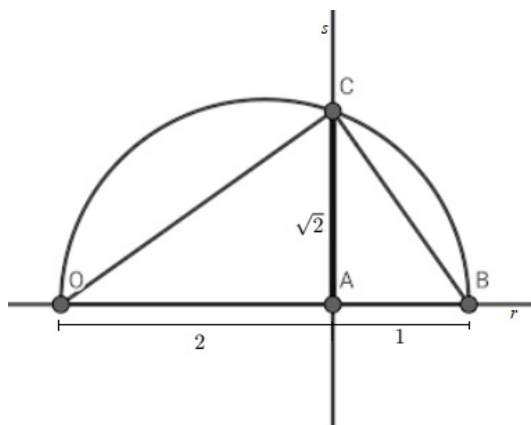


Figura 3.6: Construção de  $\sqrt{2}$ .

- Construiremos agora  $1 + \sqrt{2}$ .

Construído o segmento  $\sqrt{2}$ , fixemos a ponta do compasso em  $C$  e sobre a reta  $s$  trace um círculo de raio  $CD = 1$ , marcando o ponto  $D$  de intersecção dessa circunferência com  $s$ , temos então que  $AD = 1 + \sqrt{2}$ .

- Faremos portanto a construção de  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

Para construir  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ , proseguiremos conforme a construção de  $\sqrt{a}$ , sendo que o nosso número  $a$  será  $1 + \sqrt{2}$ .

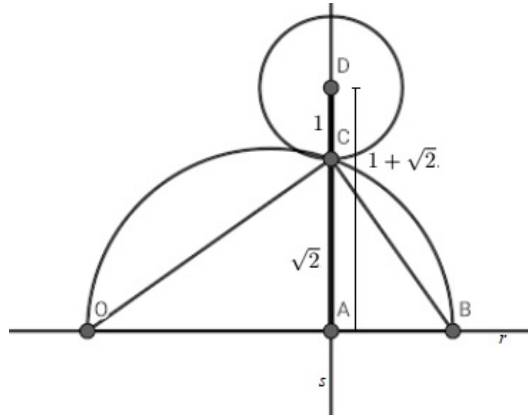


Figura 3.7: Construção de  $1 + \sqrt{2}$ .

Sobre a reta  $s$  temos o segmento  $AD = 1 + \sqrt{2}$  e  $DE = 1$ . Traçamos agora um semicírculo com  $AE$  como seu diâmetro e construímos a perpendicular  $t$  passando por  $D$  que intersecciona o semicírculo em  $F$ . Construindo o triângulo  $ADE$  temos que  $DF = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ . Pois, assim como na construção de  $\sqrt{2}$ , pela relação métrica no triângulo retângulo temos que  $DF^2 = AD \cdot DE$ .

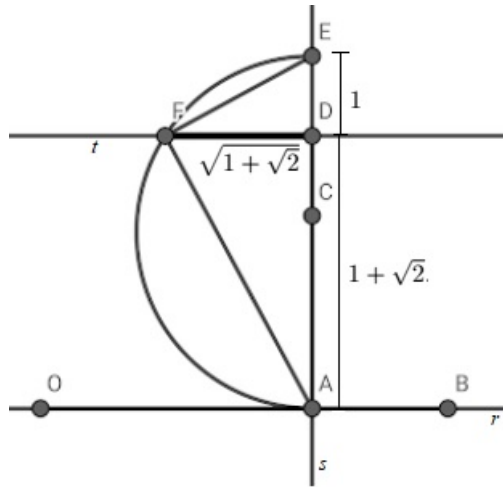


Figura 3.8: Construção de  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ .

## 3.2 Pontos Construtíveis

Uma construção com régua e compasso é realizada a partir de sequências das seguintes etapas:

- Unir dois pontos por uma reta;

- Achar o ponto de intersecção de duas retas;
- Traçar um círculo com um raio dado em torno de um ponto;
- Encontrar o ponto de intersecção entre dois círculos ou entre um círculo e uma reta.

Para realizar as etapas supramencionadas é necessário utilizar as coordenadas cartesianas no plano, onde os pontos passam a ser representados por pares ordenados  $(a, b)$  de números reais e o ponto  $(a, b)$  seja construtível. Assim, podemos então definir pontos construtíveis com régua e compasso aqueles pontos do plano cartesiano obtidos pela intersecção de retas e circunferências.

**Proposição 3.1.** *Um ponto  $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$  é construtível se, e somente se, as suas coordenadas  $a, b \in \mathbb{R}$  são números construtíveis.*

*Demonstração.*  $(\Rightarrow)$  Seja  $A = (a, b)$  um ponto construtível, seja  $O$  a origem do plano cartesiano e  $M$  o ponto médio do segmento construtível  $OA$ . Segue imediatamente da geometria elementar que o ponto  $A_0 = (a, 0)$  é a intersecção da reta do eixo  $OX$  e da circunferência  $C$  de centro no ponto médio  $M$  passando por  $A$ . De fato, o ângulo inscrito  $A_0$  é correspondente ao arco  $OA$ . Assim sendo, o triângulo  $OA_0A$  é retângulo em  $A_0$  o que faz de  $OA_0$  a projeção do ponto  $A$  sobre o eixo  $OX$ .

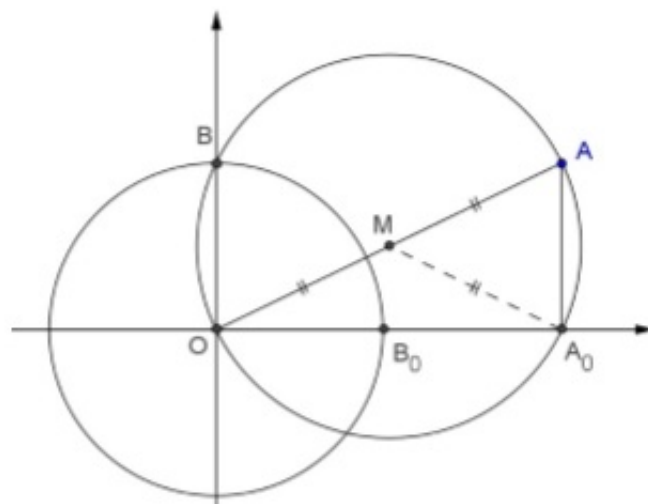


Figura 3.9: Localização no plano.

Determinado  $A_0 = (a, 0)$  pertencente a reta  $OX$ , podemos encontrar um ponto  $B_0 = (b, 0)$  traçando a partir de  $O$  uma circunferência de raio  $A_0A$

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente suponhamos  $a$  e  $b$  construtíveis. É fácil ver que a reta determinada por  $O$  e por  $(1, 0)$  é construtível. Assim sabemos construir  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$ . A partir de uma circunferência de centro em  $O$  passando por  $(b, 0)$  podemos construir também  $(0, b)$ . Enfim, traçando paralelas (ou perpendiculares) segue imediatamente a construção de  $(a, b)$  a partir de  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$ , e isto prova a proposição.  $\square$

Numa construção geométrica com régua e o compasso os pontos (ou suas coordenadas) são definidos a partir da intersecção de duas retas, da intersecção entre um círculo e uma reta ou da intersecção de dois círculos. Fazendo a repetição desses finitos pontos, obtemos as construções geométricas desde que os pontos sejam construtíveis.

Toda reta construtível pode ser representada por uma equação do tipo  $ax + by + c = 0$  onde  $a, b, c$  pertence a um corpo  $F$ . Já um círculo de centro  $(c_1, c_2)$  e que passa pelo ponto  $P(p_1, p_2)$  com  $c_1, c_2, p_1$  e  $p_2$  em  $F$  possui equação do tipo  $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ , com  $r = \sqrt{(p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2}$ , ou seja,  $r^2 = (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2$ , pois o raio  $r$  é igual a medida da distância entre o centro e o ponto. Desenvolvendo a equação do círculo teremos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2c_1x + c_1^2 + y^2 - 2c_2y + c_2^2 &= p_1^2 - 2p_1c_1 + c_1^2 + p_2^2 - 2p_2c_2 + c_2^2 \iff \\ \iff x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + 2p_1c_1 + 2p_2c_2 - p_1^2 - p_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo  $a = -2c_1$ ,  $b = -2c_2$  e  $c = 2p_1c_1 + 2p_2c_2 - p_1^2 - p_2^2$ , teremos  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  com  $a, b$  e  $c$  racionais.

Assim, temos que um número construtível pode ser obtido a partir dos números racionais por meio de uma sequência finita dos seguintes processos:

Resolução dos sistemas correspondente a:

- Intersecção entre duas retas;

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

cuja solução é da seguinte forma:

$$x = -\left(\frac{c'b - cb'}{ab' - a'b}\right) \text{ e } y = -\left(\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}\right)$$

Como as soluções acima são números de  $F$ , nota-se que o uso da régua nos dá números também de  $F$ , portanto construtíveis.

- Intersecção entre um círculo e uma reta.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Isolando  $y$  na primeira equação teremos  $y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$  e substituindo na segunda equação, obtemos para a abscissa  $x$  de um dos pontos  $d$  intersecção do círculo e da reta uma equação quadrática da forma,

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

com coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  em  $F$ , onde  $A = a'^2 + b'^2$ ,  $B = 2a'c - ab'^2 - bb'a'$  e  $C = c'^2 - bb'c' + c$ . A solução é dada pela fórmula,

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

e é da forma  $p + q\sqrt{k}$  com  $p, q, k$  em  $F$ . De forma análoga, encontramos uma fórmula semelhante para a coordenada de  $y$ .

- Intersecção entre dois círculos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda obtemos a equação linear  $2(a - a')x + 2(b - b')y + (c - c') = 0$  que pode ser resolvida através do sistema equivalente,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ 2(a - a')x + 2(b - b')y + (c - c') = 0 \end{cases}$$

Note que o sistema em questão é semelhante ao já apresentado no item anterior, dessa forma, a solução nos fornece pontos  $(x, y)$  com coordenadas da forma  $p + q\sqrt{k}$  com  $p$ ,  $q$  e  $k$  em  $F$ .

Sendo assim, temos que se partimos de pontos cujas coordenadas pertencem a um corpo  $F$ , realizarmos construções com régua e compasso envolvendo apenas intersecção entre duas retas, entre reta e círculo e entre dois círculos obteremos novos pontos cujas coordenadas serão da forma

$p + q\sqrt{k}$ . Ou seja, através de tais intersecções obteremos pontos contrutíveis.

A partir da discussão acima, concluímos que:

**Teorema 3.2.** *(Teorema sobre Construções geométricas) Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um número algébrico de grau 1, ou 2, ou 4, ou 8,..., isto é, é um número algébrico de grau igual a uma potencia de 2.*

A demonstração desse teorema encontra-se no apêndice A, pois sua demonstração não faz parte do escopo do presente trabalho, mas trata-se de um resultado imprescindível para argumentar a insolubilidade dos problemas do capítulo seguinte. (Interessados em pesquisar sobre número algébrico pode consultar [12].)

## Capítulo 4

# A Insolubilidade dos três problemas clássicos

Munidos de uma fundamentação teórica examinaremos a insolubilidade dos três problemas clássicos: duplicação do cubo, trisseção do ângulo e quadratura do círculo.

### 4.1 Duplicação do cubo

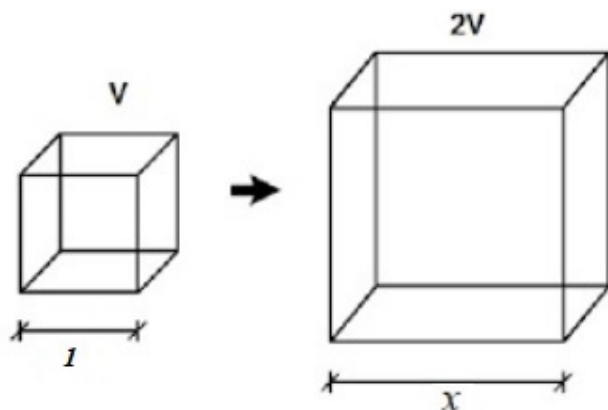


Figura 4.1: Duplicação do cubo de volume  $V$  e aresta  $x$ .

Inicialmente, elucidaremos o problema da duplicação do cubo. Dado um cubo de aresta unitária, seu volume será a unidade cúbica. Esse problema consiste em encontrarmos a aresta  $x$  do cubo com o dobro desse volume. Ou seja,

$$x^3 = 2$$

A aresta  $x$  exigida portanto satisfará a equação,

$$\begin{aligned} x^3 - 2 &= 0 \\ &= (x - 2^{\frac{1}{3}})(x^2 + 2^{\frac{1}{3}}x + 2^{\frac{2}{3}}) \end{aligned}$$

O problema equivale a provar que  $\sqrt[3]{2}$  não é construtível com régua e compasso.

Pelo Teorema 2.2, podemos dizer que  $\sqrt{2}$  é construtível, pois  $\sqrt{2}$  é algébrico e o grau do polinômio sobre  $\mathbb{Q}$  é uma potência de 2. Já o número  $\sqrt[3]{2}$ , que também é algébrico, não é construtível, pois o grau do polinômio sobre  $\mathbb{Q}$  é uma potência de 3.

## 4.2 Trissecção do ângulo

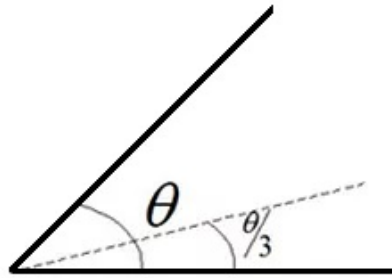


Figura 4.2: Trissecção do ângulo  $\theta$ .

A trissecção do ângulo consiste em dividir o ângulo dado em três partes iguais.

Existem ângulos, tais como os ângulos de  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , para os quais as trissecções podem ser realizadas, observe:

**Exemplo 4.1.** *Mostrar que o ângulo de  $90^\circ$  pode ser trisseccionado e realizar tal construção.*

Primeiro, note que trisseccionar o ângulo de  $90^\circ$  equivale a dividir  $90^\circ$  em três ângulos de mesma medida, ou seja, três ângulos de  $30^\circ$  a partir de uma semirreta ou de duas semirretas de mesma origem que formam um ângulo reto, que pode ser feito usando a linguagem algébrica pois  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  é número construtível.



Construiremos, inicialmente, um ângulo  $AOB = 90^\circ$ . Sem perda de generalidade, tome  $OA = OB$ , onde  $A$  e  $B$  será marcado a partir traçando uma circunferência com centro em  $O$ . Com o compasso centrado em  $B$  e com abertura igual a  $OA$ , trace uma circunferência que intersecta a anterior em um ponto, o qual chamaremos de ponto  $C$ , logo após, trace a semirreta  $OC$ . Em seguida, com o compasso centrado em  $C$  e abertura igual a  $AO$ , trace outra circunferência intersectando a segunda no ponto que chamaremos de  $D$ . Por último, trace a semirreta  $OD$ , daí teremos  $AOC = COD = DOC = 30^\circ$ .

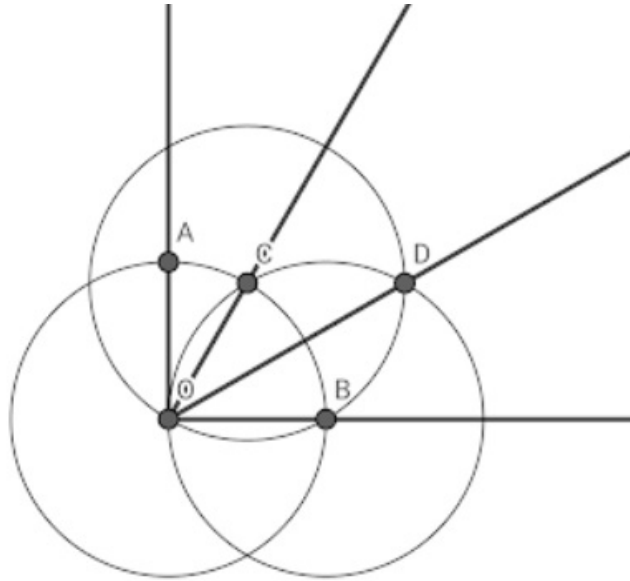


Figura 4.3: Trisecção do ângulo de  $90^\circ$ .

Como justificativa, note que ao traçarmos as duas primeira circunferências estamos construindo o triângulo equilátero  $COB$ , cujos ângulos internos medem, obviamente,  $60^\circ$ , logo,  $AOC$  mede  $30^\circ$ . Por fim, construímos a bissetriz do ângulo  $COB$ . Daí temos  $AOC = COD = DOC = 30^\circ$ .

Mas o que temos que demonstrar é que a trisecção não pode ser realizada por um processo válido para todos os ângulos. Para fazer essa demonstração, é suficiente apresentar apenas um ângulo que não pode ser trisseccionado, uma vez que o método geral válido teria que cobrir cada exemplo individual.

Vamos provar que o ângulo de  $60^\circ$  não pode ser trissecado apenas com régua e compasso.

Considere um ângulo  $3\theta$  dado e seja  $g = \cos 3\theta$ . Então o problema é equivalente ao de encontrar a quantidade  $\cos(\theta)$ .

Pela fórmula trigonométrica do cosseno da soma de dois ângulos obtemos:

$$\begin{aligned}
 \cos(3\theta) &= \cos(\theta + 2\theta) \\
 &= \cos \theta \cdot \cos 2\theta - \sin 2\theta \cdot \sin \theta \\
 &= \cos \theta [2 \cos^2 \theta - 1] - \sin \theta [2 \sin \theta \cdot \cos \theta] \\
 &= \cos \theta [2 \cos^2 \theta - 1] - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \\
 &= \cos \theta [(2 \cos^2 \theta - 1) - (1 - \cos^2 \theta)] \\
 &= \cos \theta [\cos^2 \theta - 3 + \cos^2 \theta] \\
 &= \cos \theta [4 \cos^2 \theta - 3] \\
 &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta
 \end{aligned}$$

Assim, teremos a equação

$$\cos(3\theta) = g = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Em outras palavras, o problema de trissectar o ângulo de  $3\theta$  com  $\cos(3\theta) = g$  equivale a construir a solução de uma equação cúbica

$$4z^3 - 3z - g = 0.$$

Para demonstrar sua impossibilidade de solução em geral, tomemos  $3\theta = 60^\circ$ , de modo que  $g = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , a equação acima torna-se então

$$8z^3 - 6z = 1.$$

O polinômio  $8z^3 - 6z - 1$  não é redutível a um polinômio de grau 2, portanto o ângulo  $20^\circ$  não é construtível e daí segue que o ângulo  $60^\circ$  não pode ser trisseccionado.

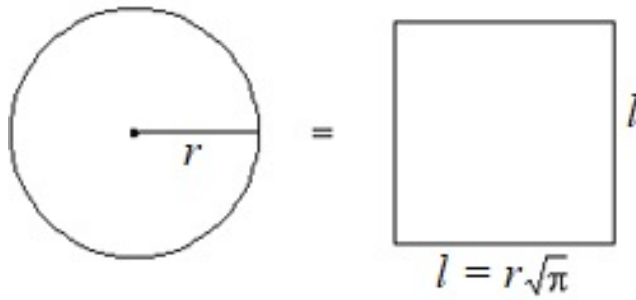


Figura 4.4: Quadratura do círculo de raio  $r$  e lado  $l$ .

### 4.3 Quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo é o mais difícil dos três problemas clássicos pois requer a utilização de técnicas da matemática avançada. A partir de um círculo de raio  $r$  construtível que tem área  $\pi r^2$ , deve-se construir com régua e compasso um quadrado cuja área seja igual  $r\sqrt{\pi}$ .

Se fosse possível construir um segmento de comprimento  $\sqrt{\pi}$  também seria possível construir um segmento de comprimento  $\pi$ . Mas, em 1882 o matemático alemão Ferdinand von Lindemann demonstrou que  $\pi$  é transcendente (ou seja, não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos) pelo que é impossível efetuar a quadratura do círculo apenas com régua e compasso. Leitor interessado na transcendência de  $\pi$  pode consultar [13] e [14].

## Capítulo 5

# Construções Geométricas no Ensino Básico

### 5.1 A Importância das Construções Geométricas no Ensino Básico

A construção geométrica é uma ferramenta auxiliar no aprendizado da geometria que visa estabelecer um raciocínio lógico-dedutivo, seu ensino é essencial para que não haja o bloqueio das capacidades de planejar, projetar ou abstrair. Além disso, a linguagem gráfica é uma forma clara, precisa e universal de comunicar e expressar ideias.

Lima (1991) considera os desenhos das figuras geométricas parte importantíssima para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Ele acha fundamental que o estudante por si só desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio, e exercitando a mente.

Apesar da importância das construções geométricas no ensino básico, a promulgação da lei n. 5692 de 1971 - Lei de diretrizes e Bases da Educação tornou o Desenho Geométrico como disciplina optativa da parte diversificada do currículo escolar, daí muitas escolas aboliram o ensino das construções geométricas. Após a publicação de alguns livros de Desenho Geométrico para as séries finais do Ensino Fundamental, o estudo das construções geométricas foi novamente ganhando espaço no ensino básico nos anos 80. Mas, esta retomada só foi dada a partir de 1998 com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, salientando o valor do estudo das construções geométricas com régua e compasso, não só no estudo da geometria, mas associadas a outros conteúdos nas aulas de Matemática.

José Carlos Putnoki, autor de coleções de livros didáticos de Desenho Geométrico para o Ensino Fundamental e Médio, considera de fundamental importância o ensino das construções geométricas com as devidas ligações com a geometria. Sobre isso tal autor declara:

”... não há Geometria sem Régua e Compasso. Quando muito, há apenas meia Geometria, sem os instrumentos euclidianos. A própria designação Desenho Geométrico me parece inadequada. No lugar, prefiro Construções Geométricas. Os problemas de construções são parte integrante de um bom curso de Geometria. O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de ”concretização”. Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem ”experimentar”. Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas.”

## 5.2 Aplicações no Ensino Básico

Vejamos alguns exemplos de exercícios com construções geométricas utilizando régua e compasso, que podem ser abordados no ensino básico.

### 1. Dados dois segmentos $a$ e $b$ , construa sua média geométrica $g = \sqrt{ab}$ .

Para construir a média geométrica precisamos recordar duas das relações métricas no triângulo retângulo. As relações que utilizaremos são  $h^2 = mn$  e  $b^2 = am$ . A primeira ( $h = \sqrt{mn}$ ) significa que a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e, a segunda ( $b = \sqrt{am}$ ), que um cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela.

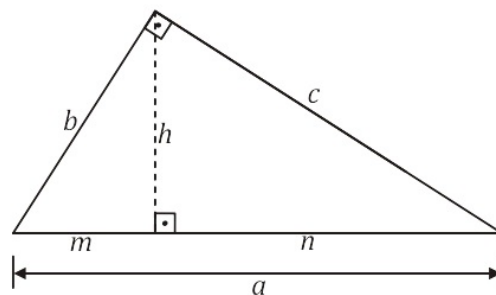


Figura 5.1: Projeções no triângulo retângulo.

Assim, construímos sobre uma reta os segmentos  $AH = a$  e  $HB = b$ . Traçando a mediatriz

de  $AB$  encontramos seu ponto médio ( $O$ ) e traçamos uma semicircunferência de centro  $O$  e diâmetro  $AB$ . A perpendicular a  $AB$  traçada por  $H$  determina o ponto  $C$  na semicircunferência. Desta forma,  $CH$  é a média geométrica entre  $a$  e  $b$ , ou seja,  $CH = g = \sqrt{ab}$ .

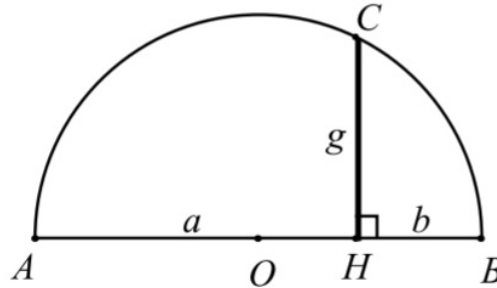


Figura 5.2: Média geométrica.

2. **Resolver a equação do segundo grau usando régua e compasso dados dois segmentos  $a$  e  $b$ . (Escreva a equação do segundo grau na forma  $x^2 - ax + b^2 = 0$ )**

A equação do segundo grau que era construída ainda na antiguidade tinha a forma  $x^2 + b^2 = ax$  onde  $a$  e  $b$  são segmentos dados. O significado era encontrar (com régua e compasso) um segmento  $x$  tal que a área do quadrado de lado  $x$  somada com a área do quadrado de lado  $b$  seja igual à área de um retângulo de base  $a$  e altura  $x$ .

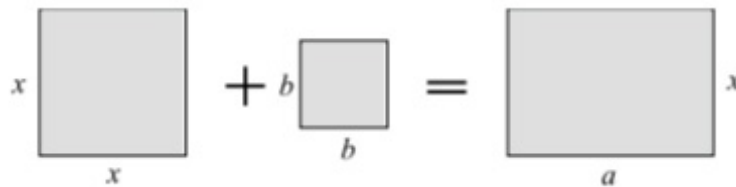


Figura 5.3: Solução da equação do segundo grau  $x^2 + b^2 = ax$  na antiguidade.

Devemos lembrar que, na antiguidade não existiam números negativos e, cada solução de uma equação era certo segmento de reta.

Inicialmente, devemos escrever a equação  $x^2 + b^2 = ax$  na forma  $x^2 - ax + b^2 = 0$ . Escrevendo  $x_1$  e  $x_2$  como são suas raízes, sabe-se que as relação entre os coeficientes da equação com a soma e também com o produto das raízes, são dadas respectivamente, por:  $x_1 + x_2 = a$  e  $x_1x_2 = b^2$ . Dessa forma, o problema passa a ser então o de determinar dois segmentos, conhecendo sua soma e sua média geométrica. Assim, deve-se traçar uma circunferência de diâmetro  $AB = a$  e uma reta paralela a  $AB$  a uma distância  $b$  de  $AB$ . Se  $b \leq \frac{a}{2}$ , essa paralela determinará um ponto  $C$  sobre a semicircunferência e a projeção de  $C$  sobre  $AB$  é o ponto  $P$  tal que  $AP = x_1$  e  $PB = x_2$ .

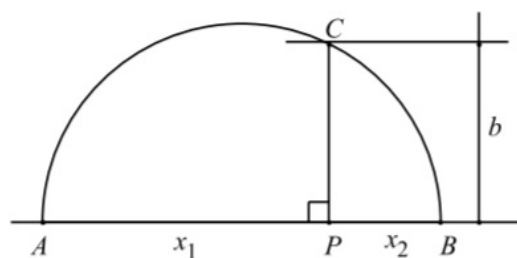


Figura 5.4: Raízes da equação do segundo grau.

### 3. Construa os números racionais:

(a)  $\frac{2}{7}$  Considere a semirreta  $OA$ . Trace uma semirreta  $t$  iniciando no vértice  $O$ , formando um ângulo qualquer com o segmento  $OA$ . Tome o compasso e, com uma abertura qualquer ( $OX$ , por exemplo), marque sobre a semirreta  $t$  sete segmentos, cada um medindo  $OX$ . Seja  $B$  a extremidade do último desses segmentos. Trace o segmento  $AB$ . Em seguida construa segmentos paralelos a  $AB$  passando pela extremidade direita de cada segmento inicial traçado sobre a semirreta  $OX$ . Esses segmentos (paralelos) dividem  $OA$  em sete partes de mesma medida. Como  $OP$  equivale a duas dessas partes, temos que  $OP = \frac{2}{7}$ .

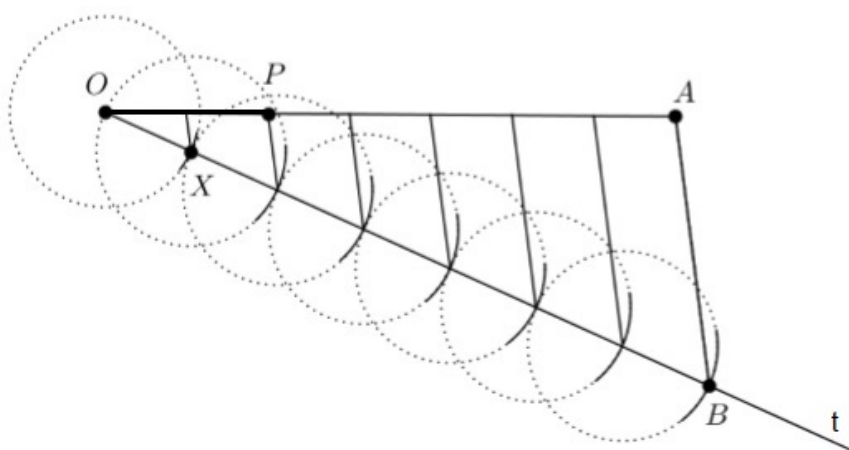


Figura 5.5: Construção de  $\frac{2}{7}$ .

(b) 1,333...

Primeiramente deve-se achar a fração geratriz da dízima periódica em questão, que será  $\frac{4}{3}$ , em seguida, justaponha 4 segmentos unitários e faça a divisão por 3, da mesma forma que foi realizado no item anterior.

### 4. Dado o segmento $AB$ , construa o quadrado $ABCD$ .

Trace por  $A$  e  $B$  retas perpendiculares ao segmento  $AB$ . Trace as circunferências de centro  $A$ , passando por  $B$  e de centro  $B$  passando por  $A$ . As interseções dessas circunferências com as perpendiculares são os vértices  $C$  e  $D$ .

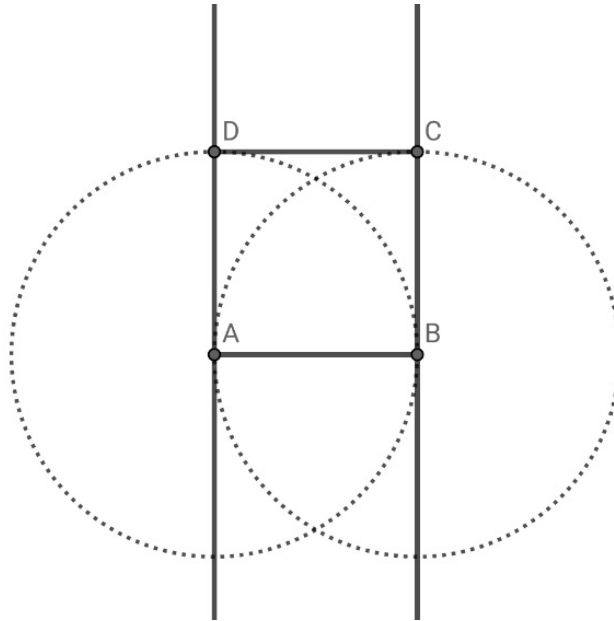


Figura 5.6: Construção de um quadrado de lado  $AB$ .

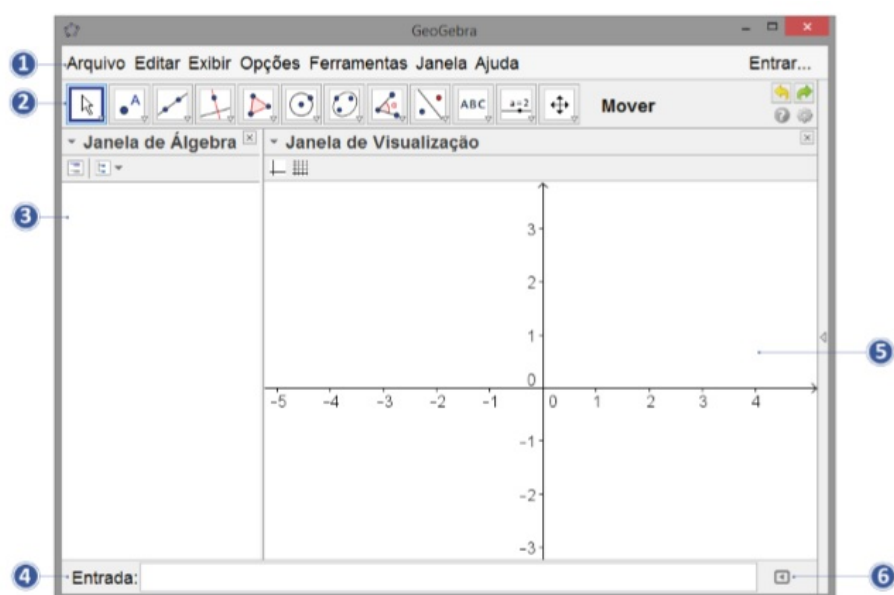
## 5.3 Construções geométricas no Geogebra

### 5.3.1 O GeoGebra

As construções geométricas consistem de um conjunto de processos para a construção de formas geométricas e resolução de problemas com a utilização da régua sem graduação e do compasso. Mas existem atualmente alguns recursos tecnológicos que auxiliam tais construções, simulando os traçados executados por esses instrumentos, a exemplo do software GeoGebra.

O GeoGebra é um programa livre de matemática que pode ser obtido gratuitamente ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)), idealizado e desenvolvido pelo Professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, Áustria, para ser utilizado em educação matemática nas escolas do ensino fundamental, médio e superior. O programa relaciona geometria e álgebra, ou seja, ao inserirmos uma expressão na janela algébrica, teremos um objeto na janela geométrica correspondente e vice-versa.





- ① **Barra de Menus**  
A Barra de Menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.
- ② **Barra de Ferramentas**  
A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.
- ③ **Janela de Álgebra**  
Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.
- ④ **Entrada**  
Campo de entrada para digitação de comandos.
- ⑤ **Janela de Visualização**  
Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.
- ⑥ **Lista de Comandos**  
Listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas.

Figura 5.7: Interface do Geogebra.

### 5.3.2 Aplicações no Ensino Básico com o uso do Geogebra

Com o uso de novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem, a exemplo da Geogebra, o professor poderá tornar suas aulas mais dinâmicas, passa a ter o papel de mediador, orientador, criando um ambiente em que o aluno torna um ser ativo no processo de aprendizagem.

O objetivo ao utilizar essa ferramenta não é que os estudantes simplesmente saibam como usá-lo.

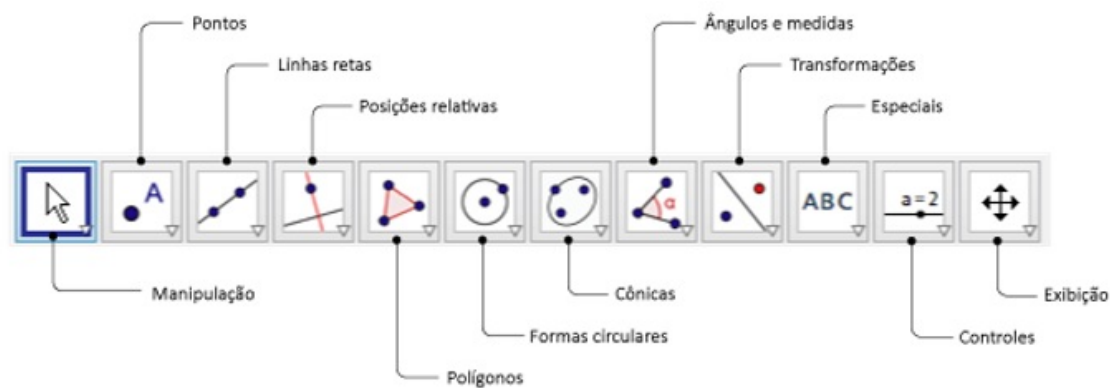


Figura 5.8: Barra de ferramentas do Geogebra.

Ele tem de estar associado a algum conteúdo. O erro mais comum dar-se ao propor uma atividade para a turma, fornecer um passo a passo de como realizá-la, listando os botões do software que devem ser acessados, o ideal é apresentar a tarefa e deixar os alunos, pensarem, experimentarem as opções do Geogebra a fim de escolher a mais adequada.

### 1. Ilustrar o Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras enuncia que “O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos seus catetos.” Assim, seja um triângulo retângulo  $ABC$ , com hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , segue que  $a^2 = b^2 + c^2$ . A construção será realizada para verificar a veracidade do teorema, bem como ajudar a compreendê-lo e visualizá-lo sem utilizar uma demonstração formal.

Para ilustrar o teorema, basta seguir os seguintes passos:

- crie uma reta  $r$ , que passe por dois pontos  $A$  e  $B$ , com o auxílio da ferramenta RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS



Figura 5.9: Construção do Teorema de Pitágoras (passo 1).

- Selecione a ferramenta RETA PERPENDICULAR e crie uma reta que seja perpendicular à  $r$  e passe por  $A$ .

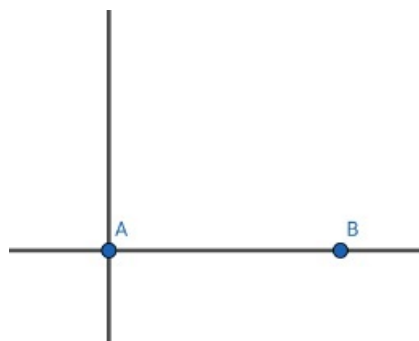


Figura 5.10: Construção do Teorema de Pitágoras (passo 2).

- Com a ferramenta NOVO PONTO, crie um ponto  $C$  diferente de  $A$ , que esteja sobre a reta perpendicular construída no passo anterior.

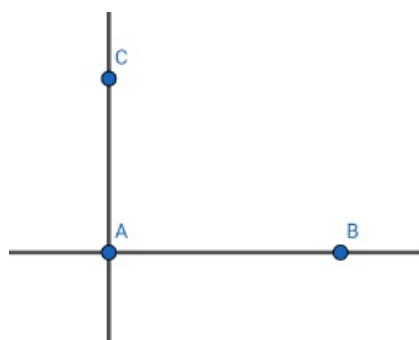


Figura 5.11: Construção do Teorema de Pitágoras (passo 3).

- Para esconder as retas  $a$  e  $b$ , basta clicar com botão direito do mouse sobre elas e, em seguida, clicar em EXIBIR OBJETO, deixando apenas os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  visíveis na tela.



Figura 5.12: Construção do Teorema de Pitágoras (passo 4).

- Selecione a ferramenta POLÍGONO e clique sobre os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $A$  (nesta ordem), criando assim o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ .

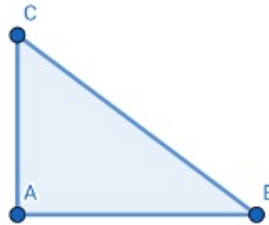


Figura 5.13: Construção do teorema de Pitágoras (passo 5).

- Com a ferramenta POLÍGONO REGULAR, crie, sobre cada lado do triângulo, um quadrado com a medida do respectivo lado. Para isso, selecione a ferramenta polígono regular e clique sobre os pontos  $C$  e  $B$ ,  $A$  e  $C$  e, por último,  $B$  e  $A$ .

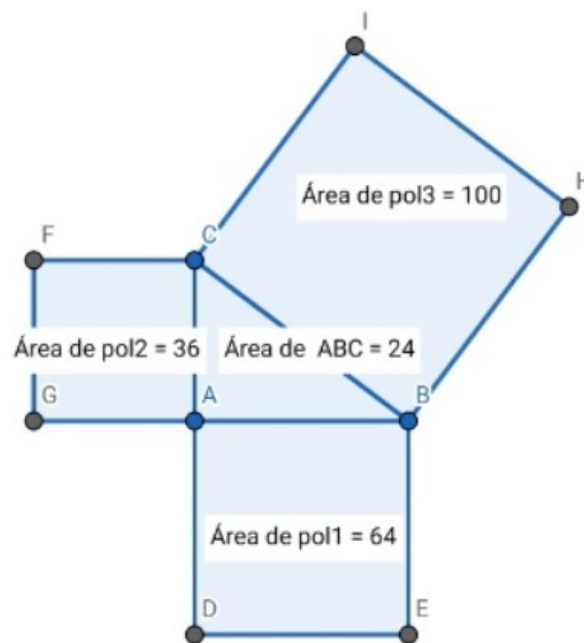


Figura 5.14: Construção do teorema de Pitágoras (passo 6).

Observe que área do polígono 3 é igual a soma das áreas dos polígonos 1 e 2

- Com o comando MOVER é possível que você mova o vértice  $B$  e  $C$ , mantendo o ângulo de  $90^\circ$  e tire conclusões a respeito do teorema.

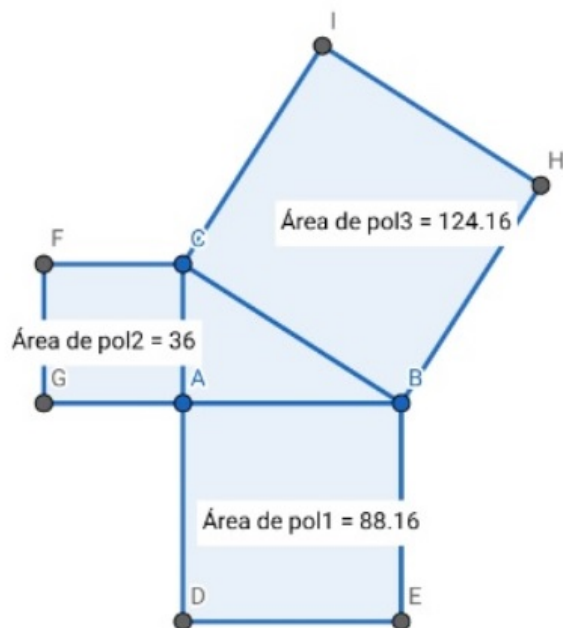


Figura 5.15: Construção do Teorema de Pitágoras (passo 7).

Note que,  $124,16 = 36 + 88,16$ . Ou seja, o quadrado de medida igual à hipotenusa corresponde à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

## 2. Ilustrar o Teorema do ângulo externo

“Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.”

- Ative a ferramenta RETA e clique em dois lugares distintos na janela de visualização, criando os pontos A e B.



Figura 5.16: Teorema do ângulo externo (passo 1).

- Em seguida, ative o comando PONTO. Clique em qualquer lugar na janela de visualização, fora da reta, e construa o ponto C.

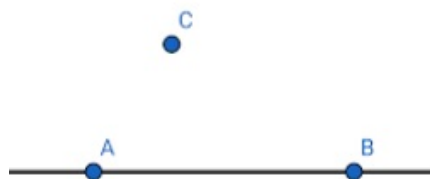


Figura 5.17: Teorema do ângulo externo (passo 2).

- Ative a ferramenta POLÍGONO e forme o triângulo ABC.

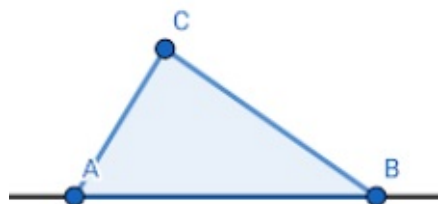


Figura 5.18: Teorema do ângulo externo (passo 3).

- Novamente com a ferramenta PONTO, crie um ponto D na reta.

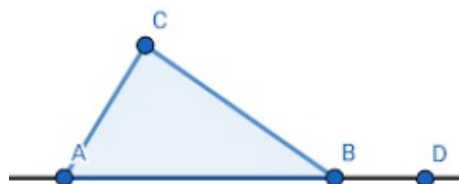


Figura 5.19: Teorema do ângulo externo (passo 4).

- Agora, com o comando ÂNGULO, clique nos pontos A, C, B, nesta ordem, demarcando o ângulo no vértice C, no interior do triângulo. Da mesma forma, clique nos pontos B, A, C e D, B, C e forme, respectivamente, o ângulo no vértice A, no interior do triângulo, e o ângulo na parte externa do triângulo, no vértice D.
- Com o comando MOVER é possível que você mova o vértice C e tire conclusões a respeito do teorema.

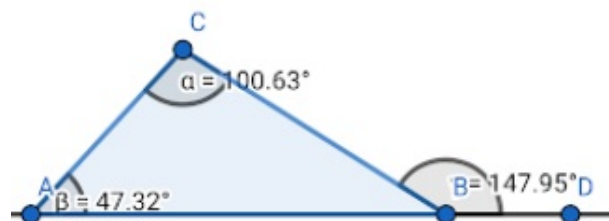


Figura 5.20: Teorema do ângulo externo (passo 5).

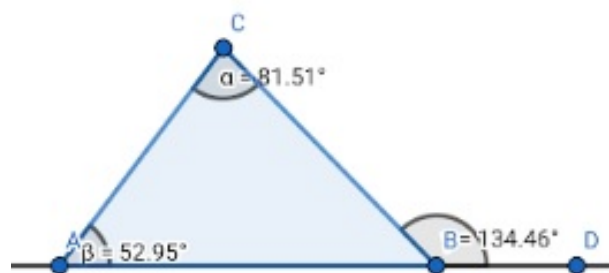


Figura 5.21: Teorema do ângulo externo (passo 6).

# Referências Bibliográficas

- [1] BICUDO, I. Os elementos/Euclides; tradução e introdução de. São Paulo : Editora UNESP,. 2009.
- [2] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- [3] GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências, Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [4] BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, Ltda., 1974.
- [5] WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [6] NETTO, Sérgio Lima **Construções Geométricas: Exercícios e soluções**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.
- [7] REZENDE, Eliane Q. F. e QUEIROZ, Maria L. B. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**: 2 ed. São Paulo: Editora Unicamp, 2008.
- [8] COURAND, Richard e ROBBINS, Hebert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.
- [9] MACHADO, G. M. **A construção dos números**. Trabalho de conclusão de curso. Departamento de Matemática. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos - SP: UFSCar, (2014).
- [10] Valderi C. da Costa. **Números construtíveis**. Campina Grande. 2013. PROFMAT.
- [11] Ana Cristina P. F. Meira e Fábio A. Matos. **Aplicação da álgebra no estudo de segmentos construtíveis**. São João Del-rei. 2013. PROFMAT.



- [12] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de janeiro: IMPA, 2015.
- [13] NIVEN, Ivan. **Números Racionais e Irracionais**. 1. ed. Rio de janeiro: IMPA, 2012.
- [14] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de, . **Números Irracionais e Transcendentes**. 3. ed. Rio de janeiro: IMPA, 2011.

## Apêndice A

# Demonstração do Teorema sobre Construções Geométricas

**Teorema A.1.** (*Teorema sobre Construções Geométricas*). Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um número algébrico de grau 1, ou 2, ou 4, ou 8,..., isto é, é um número algébrico de grau igual a uma potência de 2.

*Demonstração.* Sejam  $O(0,0)$  e  $U(1,0)$

Definamos:

$P_0(O,U)$ ,  $P_1 = \langle P_0 \rangle, \dots, P_n = \langle P_{n-1} \rangle, \dots$  onde  $P_n$  é o conjunto dos pontos do  $\mathbb{R}^2$  construtíveis a partir dos pontos de  $P_{n-1}$ .

É fácil notar que  $P_n - P_{n-1}$  tem apenas um número finito de pontos e que  $P_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$  é o conjunto de todos os pontos construtíveis de  $\mathbb{R}^2$ .

Um número real é construtível se é considerado de um ponto construtível. Neste ponto, já sabemos que todo real é construtível.

Indicando por  $K_n$  o menor subcorpo de  $\mathbb{R}$  que contém  $Q$  e todas as coordenadas dos pontos de  $P_n$ , existem  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K_n$  tais que  $K_n = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$ .

Como  $K_{n-1} \subset K_n$  existem  $\beta_1, \dots, \beta_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  tais que  $K_n = K_{n-1}[\beta_1, \dots, \beta_s]$ .

Escolhendo os  $\beta_1, \dots, \beta_s$  de modo que  $K_n - 1 \subsetneq K_{n-1}[\beta_1] \subsetneq K_{n-1}[\beta_1, \beta_2] \subsetneq \dots \subsetneq K_n$  cada

extensão dessas é simples sobre a anterior e o elemento  $\beta_i$ , com  $1 \leq i \leq n$  é coordenada de um ponto do conjunto solução de um sistema de duas equações lineares do segundo grau. Logo,  $\beta_i$  é raiz de um polinômio de grau 1 ou 2 sobre o corpo para cada extensão tem grau 1 ou 2 de modo que  $[K_n : K_{n-1}]$  é uma potência de 2.

Supondo por hipótese de indução que  $[K_{n-1} : Q]$  é uma potencia de 2, segue que  $[K_n : Q]$  é potência de 2.

Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  construtível, existe a extensão  $K_n = Q[\alpha]$ , pois toda extensão finita é simples, logo,  $[Q[\alpha] : Q]$  é potência de 2.

□